

沪深300股指期货的风险特征

——基于Copula函数的相依风险测度

王吉培¹ 王开业²

1. 西南财经大学 统计学院 2. 模拟银行中心, 四川 成都 610074

摘要: 本文研究了沪深300股指和股指仿真交易收益率极端风险和相依关系。用DCC-GARCH模型描述了股指期货和现货之间动态的条件相关系数, 并以极值分布为边际分布对四种常用的Copula函数进行了拟合, 发现Frank Copula的拟合效果最好, 其次为Clayton Copula。在此基础上, 对不同组合的VaR和CvaR进行测度, 发现投资组合比例与风险之间呈现“U”型特征, 这也为套期保值提供了一种新的研究方式。

关键词: 极值分布, Copula函数, VaR, CvaR, 套期保值

中图分类号: F224

文献标识码: A

一、引言

金融资产的相关性塑造了这样的一种风险机制: 它为风险的传播提供了便捷的渠道, 使之在与其相关联的金融产品中间肆意蔓延, 不断的积累能量并触发新的风险以至于金融风波, 如美国的次贷危机所引发的全球经济动荡。因此, 如何度量金融资产的相关性历来为学者所关注。

股指期货在中国生存的土壤已经具备, 资本市场对股指期货的推出早是翘首以待, 股指期货不仅可以作为风险管理工具, 有效分散和转移企业的金融风险, 而且还可以充当套期保值的职能, 为投资者赢得利润。但股指现货和期货之间特殊的关联关系使得杠杆值进一步增加, 这又成为金融市场上新的风险来源。因此, 在股指期货推出之前, 考察期货和现货的动态相关关系, 分析其风险特征并进行套期保值的研究是具有一定的学术价值和实际意义的。

风险度量是应用各种模型通过数据进行风险度量与分析, 采用包括波动率、贝塔系数、VaR等模型给出风险水平的度量^[1]。风险管理的基础和核心是对风险的定量分析和评估, 即风险测量。随着金融市场和金融交易的规模、动态性和复杂性的增加, 金融理论和金融工程的发展, 金融市场风险测量技术也变得更为综合、复杂。金融风险不仅严重影响了工商企业和金融机构的正常运营和生存, 而且还对一国乃至全球金融及经济的稳定发展构成严重威胁。近年来, 英国巴林银行的倒闭、日本大和银行的巨额亏损等, 使人们感受到如何合理地测定与管理市场风险的重要性。目前, 金融市场风险测量的主要方法包括灵敏度分析、波动性方法、VaR、压力试验(stress testing)和极值理论(extreme value theory), 简称EVT)。其中, VaR是目前金融市场风险测量的主流方法^[2]。

目前对金融资产收益序列的风险的研究众多, 估计方法主要包括历史模拟法、参数方法和非参数方法。历史模拟是利用收益序列的经验分布来近似真实分布, 该方法虽然简单, 但不能对过去观察不到的数据进行外推, 在运用中受到限制; 参数方法假定资产收益服从某一特定过程, 基于某一特定分布, 得出的风险值多是对金融资产收益的总体风险的度量, 并未很好的考虑到极端风险。由于金融市场上的收益率存在尖峰厚尾的特征, 极端事件的发生虽然稀少, 损失却很大, 人们最为关注的风险就是这种极端风险。极值分布作为一种非参数方法, 不须设定模型, 而是让数据去选择, 相对于一般的椭圆分布, 它更能捕捉到市场的极端风险^[3]; 而极端风险间的相关是一种非线性相关, 由于金融收益率具有的“波

动丛集性”的特征，使得一般的线性相关无法准确描述金融资产间的关联关系^[4]，Copula作为一种数学函数可以用来度量金融市场上的非线性相关，正确设定研究对象的边缘分布是构造Copula函数的关键。Copula这一概念最早是由SKlar^[5]

(1959)提出，最近几年才发现它能应用在金融风险管理中，对这一方法比较系统的理论和介绍可以参见Joe(1997)、Nelsen(1999)和Embrechts等(1999)^{[6][7][8]}首先将这一方法应用到金融领域。Longi(2000)^[9]应用Copulas方法对信用风险及信用衍生产品定价进行研究。Frey和McNeil(2003)^[10]使用Copula方法来分析尾部相关性，采用比较一般化的相关系数进行定义。近年来使用Copula方法对组合风险进行度量的研究还有Bouye, Gaussel和Salmon(2002)^[11]，Longi和Solink(2001)^[12]，Glasserman^[13]等(2002)，Embrechts等^[14](2003)，Rosenberg和Schuermann(2005)^[15]等。Embrechts等(2003)^[16]和Cherubini等(2004)对Copula在金融中的相关应用给出了比较全面的综述。

本文在综合前人研究的基础上，以极值分布作为构造Copula的边缘分布，合理刻画沪深300股指现货和期货收益率的极端风险，找出能够精确度量极端风险的相依结构，并对相依关系做出了合理解释。

二、模型介绍

(一) VaR 及 CVaR 模型

1、VaR 模型

VaR 也称在险价值，是一定时期内，在一定的置信度下，投资组合可能出现的最大损失，是国际上新近发展起来的一种卓有成效的风险量化技术。假设 X 代表某一金融资产的损失，其密度函数为 $f(x)$ ，则 VaR 可以表示为：

$$VaR_p = \inf\{x | f(X \leq x) > p\} \quad (1)$$

当密度函数 $f(x)$ 为连续函数时也可以表示为： $VaR_p = F^{-1}(p)$ ，其中 F^{-1} 为损失分布 $F(x)$ 的反函数。

2. CVAR 的计算模型

CVaR 是指损失超过 VaR 的条件均值，也称为期望短缺 CVAR(Expected Shortfall)或尾部VaR(Tail VaR)，其数学表示为： $CVaR_\alpha = E[X | X > VaR_\alpha]$ ， X 表示损失(即负的收益)。CVaR(Conditional Value at Risk)是由Rockafeller和Uryasev提出了，它弥补了 VaR 的缺陷。对于一个连续性的随机变量，CVaR 是超过VaR的损失期望值。此时有：

$$CVaR_\alpha = VaR_\alpha + E\left[f(x, y) - VaR_\alpha \mid f(x, y) > VaR_\alpha\right] = \int_{VaR_\alpha}^{+\infty} x dF(x | x > VaR_\alpha) \quad (2)$$

因为 VaR 往往会低估风险，大多数金融情景下的风险衡量，会带来灾难性的后果。而这个问题可以被 CVaR 所解决。CVaR 满足平移不变性、正齐次性、次可加性和单调性，因而是一致性的风险度量。CVaR 代表了超额损失的平均水平，反映了损失超过 VaR 阈值时可能遭受的平均潜在损失的大小，较之 VaR 更能体现潜在的风险价值。

(二) DCC-GARCH 模型

DCC-GARCH 模型有 Engle(2002) 提出, 是在 Bollerslev(1990)提出的常相关模型的基础上发展出来的。设 r_t 为具有零均值的收益序列, 则 DCC-GARCH 的具体模型为:

$$\begin{aligned}
 r_t |_{t-1} &\sim N(0, D_t R_t D_t) \\
 D_t^2 &= \text{diag}\{\omega_i\} + \text{diag}\{k_i\} \circ r_{t-1} r_{t-1}' + \text{diag}\{\lambda_i\} \circ D_{t-1}^2 \\
 \varepsilon_t &= D_t^{-1} r_t \\
 Q_t &= S \circ (u' - A - B) + A \circ \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + B \circ Q_{t-1} \\
 R_t &= \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

其中 D_t^2 是一个对角矩阵, 对角线的元素即为各变量的条件方差, Q_t 为标准残差 ε_t 的条件协方差矩阵, S 为标准残差 ε_t 的无条件协方差矩阵, R_t 为条件相关系数矩阵, 符号 “ \circ ” 代表 Hadamard 乘积, 即两矩阵对应元素相乘, $\text{diag}_t\{Q_t\}^{-1/2} = \text{diag}(1/\sqrt{q_{11,t}}, \dots, 1/\sqrt{q_{mm,t}})$, $\omega_i, k_i, \lambda_i, A, B$ 为所要估计的参数。

收益服从多元正态分布是使用极大似然估计的前提, 若此前提假设不成立, 只能使用拟极大似然估计 (Quasi-Maximum Likelihood)。估计过程分为两阶段估计^[17]: (1) 使用一元 GARCH 模型对各变量进行估计; (2) 使用前一步骤所得的标准残差来估计条件相关系数 (条件协方差)。

(三) POT 模型及极端风险测度

极值理论作为度量极端风险的一种方法, 具有超越样本数据的估计能力, 并可以准确地描述分布尾部的分位数。它主要包括两类模型: BMM 模型和 POT 模型。其中 BMM 模型是一种传统的极值分析方法, 主要用于处理具有明显季节性数据的极值问题上, POT 模型是一种新型的模型, 对数据要求的数量比较少, 是目前经常使用的一类极值模型^[18]。本文将采用 POT 模型进行估计。

1. POT 模型的理论基础

假设序列 $\{z_t\}$ 的分布函数为 $F(x)$, 定义 $F_u(y)$ 为随机变量 Z 超过阈值 u 的条件分布函数, 它可以表示为:

$$F_u(y) = P(Z - u \leq y | Z > u) \quad y \geq 0 \tag{4}$$

根据条件概率公式我们可以得到:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(z) - F(u)}{1 - F(u)} \Rightarrow F(z) = F_u(y)(1 - F(u)) + F(u), \quad z \geq u \tag{5}$$

定理 (Pickands (1975)): 对于一大类分布 F (几乎包括所有的常用分布) 条件超限分布函数 $F_u(y)$, 存在一个 $G'_{\xi, \sigma}(y)$ 使得:

$$F_u(y) \approx G'_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma} y)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \xi = 0 \end{cases} \quad u \rightarrow \infty \quad (6)$$

当 $\xi \geq 0$ 时, $y \in [0, \infty)$; 当 $\xi < 0$ 时, $y \in [0, -\sigma/\xi]$ 。函数 $G'_{\xi, \sigma}(y)$ 称广义帕累托分布。

2. POT 模型的建立和求解

本文采用最大似估计法 (Maximum Likelihood CVaRtimation) 估计参数 ξ 与 β , 求极值分布的方法如下:

第一步, 找出 GPD 概率密度函数:

$$F_u(y) \approx G'_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma} y)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-y/\sigma} & \xi = 0 \end{cases} \quad u \rightarrow \infty \quad (7)$$

第二步, 求其对数似然函数:

$$L(\xi, \sigma | y) = \begin{cases} -n \ln \sigma - (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \frac{\xi}{\sigma} y_i) & \xi \neq 0 \\ -n \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n y_i & \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

第三步, 确定阈值 u

Dupuis (1998) 给出了对阈值 u 的估计方法, 一般有两种: 根据 Hill 图、根据样本的超限期望图, 本文采用样本的超限期望图确定阈值 u , 令 $X_{(1)} > X_{(2)} > \dots > X_{(n)}$, 样本的超限期望函数定义为:

$$e(u) = \frac{\sum_{i=k}^n (X_i - u)}{n - k - 1} \quad k = \min\{i | X_i > u\} \quad (9)$$

超限期望图为点 $(u, e(u))$ 构成的曲线, 选取充分大的 u 作为阈值, 使得当 $x \geq u$ 时 $e(x)$ 为近似线性函数:

$$e(m) = E(X - m | X > m) = \frac{\sigma + \xi m}{1 + \xi} \quad \sigma + \xi m > 0 \quad (10)$$

第四步, 估计结果

当 u 确定以后, 利用 $\{z_i\}$ 的值, 根据公式 (6) 进行最大似然估计得到 $\hat{\xi}$ 和 $\hat{\sigma}$ 。

同时, 我们得到 $\{z_i\}$ 的值中比阈值 u 大的个数, 记为 N_u , 根据公式 (4) 用频率代替 $F(u)$ 的值, 可以得到 $F(z)$ 的表达式:

$$F(z) = F_u(y)(1 - F(u)) + F(u) = \begin{cases} \frac{N_u}{N} (1 - (1 + \frac{\xi}{\sigma}(z-u))^{-1/\xi}) + (1 - \frac{N_u}{N}) \\ \frac{N_u}{N} (1 - e^{-(z-u)/\sigma}) + (1 - \frac{N_u}{N}) \end{cases} \quad (11)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{N_u}{N} (1 + \frac{\xi}{\sigma}(z-u))^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \frac{N_u}{N} e^{-(z-u)/\sigma} & \xi = 0 \end{cases}$$

3. 基于极值分布的VaR估计^[4]

由上式取反函数(Invert)可以得出 VaR 的估计式, 对于给定某个置信水平 p , 可以由 $\{z_t\}$ 的分布函数公式 (8) 可以得到

$$VaR_p = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} ((\frac{N}{N_u}(1-p)) - 1) & \xi \neq 0 \\ u - \sigma \ln(\frac{N}{N_u}(1-p)) & \xi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$ES_p = VaR_p + E(Z - VaR_p | Z > VaR_p)$$

根据 GPD 的条件分布函数公式 (5) 可以得到:

$$ES_p = VaR_p + \frac{\sigma + \xi(VaR_p - u)}{1 - \xi} = \frac{VaR_p}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1 - \xi} \quad (13)$$

(四) Copula 函数及相依风险测度

1、四种常用的Copula函数

Juri (2002) 提出的 Copula 函数包含了变量尾部相关的全部信息, 可以使分析者更加全面的了解变量之间的尾部相关关系。为了对变量之间的尾部相依关系进行刻画, 我们在对沪深 300 股指现货和期货相依关系的研究中使用了 4 种 Copula 函数, 分别是 Gumbel、Guass、Clayton 和 Frank 函数。

(1) Gauss Copula 函数

$$C_{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt \quad (14)$$

φ 为一元标准正态分布, $\rho \in (-1, 1)$ 。 C_{Ga} 事实上是边际分布为标准正态分布。

诸多研究表明, 在数据的中间部分, 模拟 C_{Ga} 与实际数据吻合较好, 但在尾部差别相当明显, 当要度量尾部风险相依性时, 椭圆族的高斯 Copula 是无能为力的。

(2) Gumbel Copula 函数

Gumbel Copula 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C_G(u, v; \delta) = \exp\left\{-[(-\ln u)^{1/\delta} + (-\ln v)^{1/\delta}]^\delta\right\} \quad (15)$$

$$c_G = \frac{C_G(u, v; \delta)(\ln u \cdot \ln v)^{1/\delta-1}}{uv[(-\ln u)^{1/\delta} + (-\ln v)^{1/\delta}]^{2-\delta}} \left\{ [(-\ln u)^{1/\delta} + (-\ln v)^{1/\delta}]^\delta + \frac{1}{\delta} - 1 \right\} \quad (16)$$

其中 $\delta \in (0, 1]$ 。当 $\delta = 1$ 时, $C_G(u, v; 1) = uv$, 即随机变量 u 、 v 独立; 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 随机变量 u 、 v 趋向于完全相关, 且 $\lim_{\delta \rightarrow 1} C_G(u, v; \delta) = \min(u, v) = C^+$, 即当 $\delta \rightarrow 1$

时, Gumbel Copula 函数趋向于 Fréchet 上界 C^+ 。

Gumbel Copula 的密度函数具有非对称性, 上尾高下尾低, 其密度分布呈“J”字型。Gumbel Copula 函数上尾的相关性较强, 可用于描述在上尾处具有较强相关关系的现象。收益率呈左偏分布时, 多用 Clayton Copula 去描述相关关系。

(3) Clayton Copula 函数

Clayton Copula 函数的分布函数与密度函数分别为:

$$C_c(u, v; \delta) = (u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-1/\delta} \quad (17)$$

$$c_c(u, v; \delta) = (1 + \delta)(uv)^{-\delta-1}(u^{-\delta} + v^{-\delta} - 1)^{-2-1/\delta} \quad (18)$$

其中 $\delta \in (0, \infty)$ 。当 $\delta \rightarrow 0$ 时, $\lim_{\delta \rightarrow 0} C_c(u, v; \delta) = uv$, 即随机变量 u 、 v 趋向于独立, 当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, 随机变量 u 、 v 趋向于完全相关, 且 $\lim_{\delta \rightarrow \infty} C_c(u, v; \delta) = \min(u, v) = C^+$, 即当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, Clayton Copula 函数趋向于 Fréchet 上界 C^+ 。

Clayton Copula 的密度函数同样具有非对称性, 上尾低下尾高, 其密度分布呈“L”字型。Clayton Copula 函数下尾的相关性较强, 可用于描述在下尾处具有较强相关关系的现象。收益率呈右偏分布时, 多用 Clayton Copula 去描述相关关系。

(4) Frank Copula 函数

Frank Copula 函数的分布函数和密度函数分别为:

$$C_F(u, v; \alpha) = -\frac{1}{\alpha} \log \left[1 - \frac{(1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})}{1 - e^{-\delta}} \right] \quad (19)$$

$$c_F(u, v; \delta) = \frac{\delta(1 - e^{-\delta})e^{-\delta(u+v)}}{[(1 - e^{-\delta}) - (1 - e^{-\delta u})(1 - e^{-\delta v})]^2} \quad (20)$$

其中 $\delta \neq 0$ 。 $\delta > 0$ 时, 随机变量 u 、 v 正相关, $\delta \rightarrow 0$ 时随机变量 u 、 v 趋向于独立, $\delta < 0$ 时随机变量 u 、 v 负相关。Frank Copula 的密度函数具有对称性, 其密度分布呈“U”型。

2、Copula 模型的估计

Copula 模型的参数估计采用两阶段的极大似然估计方法。极大似然方程为:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_n(x_n^t; \theta_n), \dots, F_N(x_N^t; \theta_N); \delta) + \sum_{y=1}^T \sum_{n=1}^N \ln f_n(x_n^t; \theta_n) \quad (21)$$

$f(x_1^t, \dots, x_n^t, \dots, x_N^t) = c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_n(x_n^t; \theta_n), \dots, F_N(x_N^t; \theta_N); \delta)$ 为联合密度函数, θ_n 是边际分布 F_n 的参数, δ 是 Copula 分布密度函数的参数, 所有的参数集为:

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N; \delta) \quad (22)$$

第一步, 估计边缘分布函数参数: $\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta_n} \sum_{y=1}^T \ln f_n(x_n^t; \theta_n)$

第二步, 在已知第一步参数的情况下, 对进行估计:

$$\hat{\delta} = \arg \max_{\delta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t; \theta_1), \dots, F_n(x_n^t; \theta_n), \dots, F_N(x_N^t; \theta_N); \delta) \quad (23)$$

以上方法又称边际推断函数法(IFM), 参数的估计称为边际推断估计(IFME), IFME 和 MLE 的效率是非常接近的, 具有一致性和渐进正态性。

3、基于 copula 的 VaR 算法

结合前面的极值分布, 测定 VaR 的算法主要步骤如下:

第一步, 估计沪深 300 股指现货和期货收益率的极值分布参数;

第二步, 以 GPD 为边际分布, 估计四种 Copula 函数的参数;

第三步, 根据一定准则选取拟合最优的 Copula 函数;

第三步, 使用恰当的运算法则从最优的 Copula 函数产生 pseudo 随机数;

第四步, 用蒙特卡罗模拟, 产生 10000 组模拟的资产组合估计 VaR。

三、实证分析

(一) 样本选取及说明

沪深 300 指数期货合约于 2006 年 10 月 30 日开始在中国金融期货交易所进行仿真交易, 从 07 年起进行考察, 本文选取了 2007 年 1 月 4 日到 2008 年 9 月 26 日间期现指数收盘价作为分析对象。数据来源于中国金融期货交易所 (www.cffex.com.cn)。沪深 300 指数期货推出的是当月、下月和随后两个季月的合约, 每个期货合约都有到期日, 为了克服期货价格的不连续性, 我们把每一天离到期日最近的合约品种的收盘价格连接起来。收益率定义为:

$r_t = \log p_t - \log p_{t-1}$, 用 p_t 表示第 t 日指数收盘价, 为了凸显研究对象的数字特

征, 不妨做个单调变换, 把收益率定义为 $r_t^* = 100 * (\log p_t - \log p_{t-1})$ 。沪深 300 股指现货和期货收益率分别用是 s 和 f 表示。

(二) 样本描述统计

首先对沪深股指 300 现货和期货收益率进行了描述统计, 结果表明沪深股指 300 现货收益率的标准差 2.7080, 明显的低于仿真股指期货收益率的标准差, 期货收益为的峰度为 7.5163, 现货收益率的峰度为 3.9259, 这说明期货收益率的整体波动要大一些。从 J-B 正态检验来看, 无论是期货还是现货的收益率都显著

的拒绝原正态分布的假设。虽然现货收益率的均值和中位数都大于期货所收益率，但现货收益率的偏度为-0.3590，期货的为1.1641。

采用DCC-GARCH模型对沪深300股指现货和期货收益率序列进行拟合，图1显示两个收益率序列动态相关的特征示例，其中纵坐标为动态时变相关系数。两指数收益序列动态相关性非常强，相关系数最小为0.0293，最高为0.8909，平均为0.7077，标准差为0.0751。

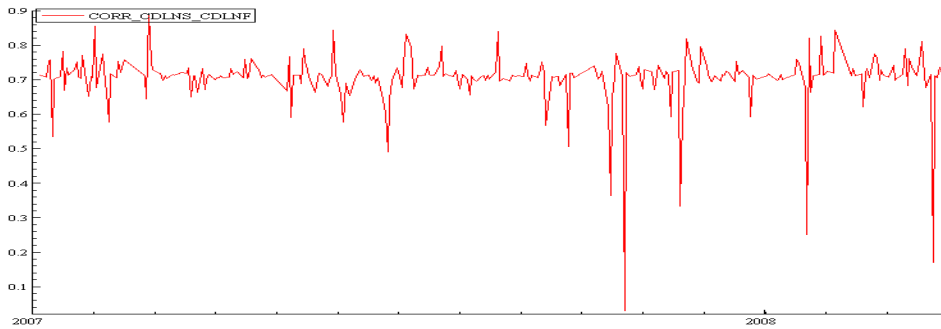


图 1：基于 DCC-GARCH 模型收益率条件相关的动态描述

(三) 极值分布建模及极端风险测度

1、极值分布的阈值选取

基于极值理论中的POT模型，我们需要确定恰当的阈值 u 对超限分布进行GPD拟合。DuMouchel (1983) 的研究表明，在 u 允许的情况下选取10%左右的数据作为极值数据组是比较合适的选择，否则可能会出现样本内过度拟合，样本外不适用^[19]。图3和图4分别描绘了沪深300股指现货和期货收益率下尾和上尾以及各自的阈值变动范围，以现货收益率下尾分布为例：样本的平均超限函数图在-3.3附近近似直线，具有明显的帕累托分布特征，并且我们结合阈值平缓变动的范围，经过多次试验，最终确定当 $u = -3.629$ ， $N_u = 43$ 时能够较好的刻画下尾特征。

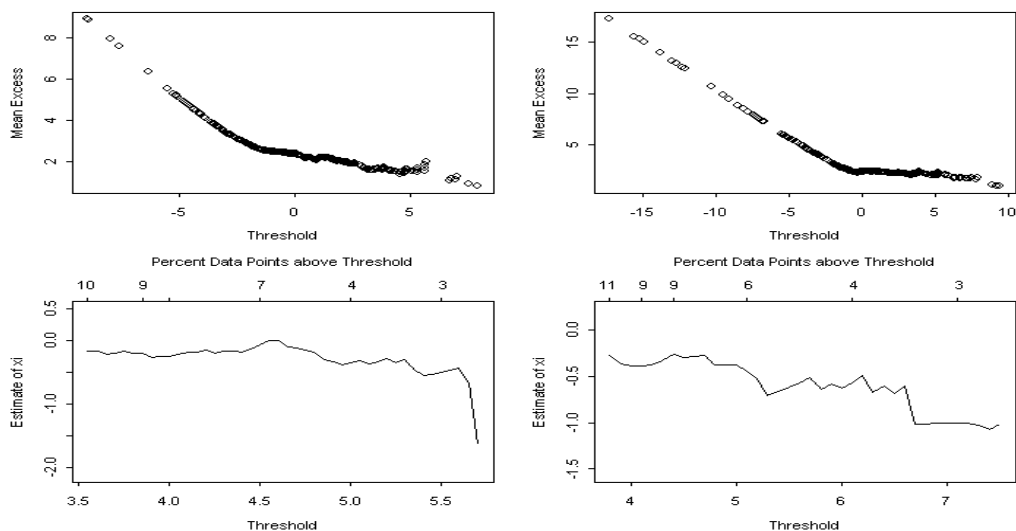


图 2：超限期望图及下尾阈值范围。左上为现货收益率下尾，右上为期货收益率下尾，左下为现货收益率下尾阈值范围，右下为期货收益率下尾阈值范围。

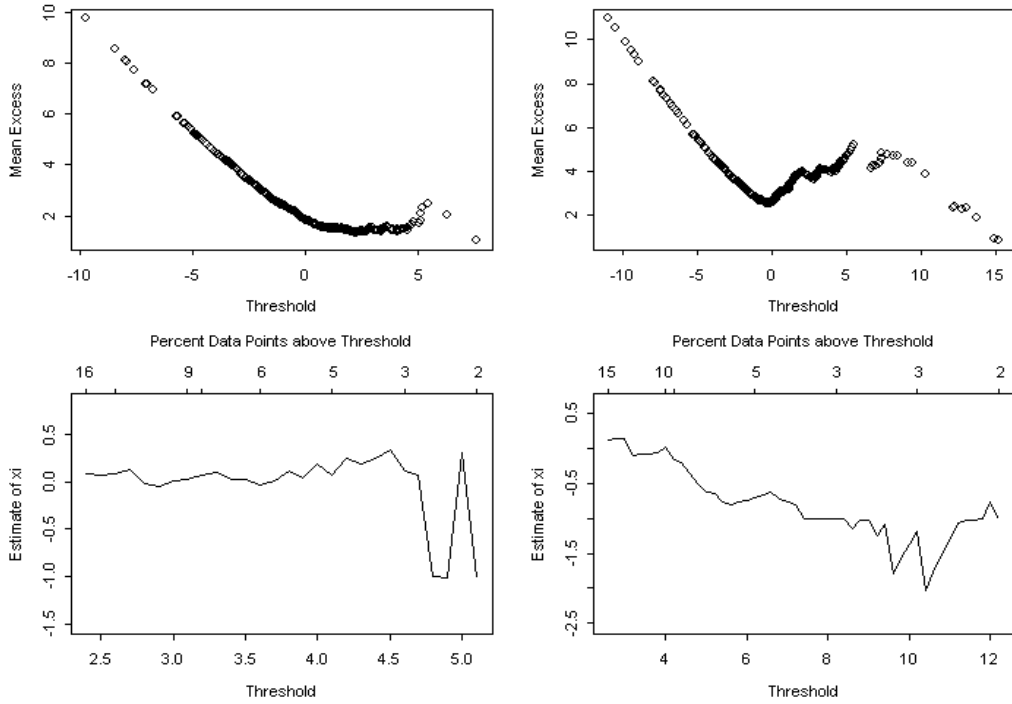


图 3：沪深 300 股指现货和期货收益率上尾阈值范围。左上为现货收益率上尾，右上为期货收益率上尾，左下为现货收益率上尾阈值范围，右下为期货收益率上尾阈值范围。

2、GPD 参数估计结果

根据选取的阈值，进行极大似然估计，进行尾部的拟合，得到以下参数，由尾部拟合优度图（图 4）可以看出下尾尾部的大部分点基本都落在图中的曲线上。由于数据分布的原因，上尾拟合不可避免的存在一些偏差，总体来看 GPD 的拟合效果是比较理想的。

表 1 GPD 参数估计结果

	尾部	阈值	超出样本	xi	beta
现货收益率	上尾	3.349	32	0.02166004	1.439442
	下尾	-3.629	43	0.05388388	1.319256
期货收益率	上尾	4.399	37	-0.1974917	4.916466
	下尾	-4.296	37	0.1156957	3.253238

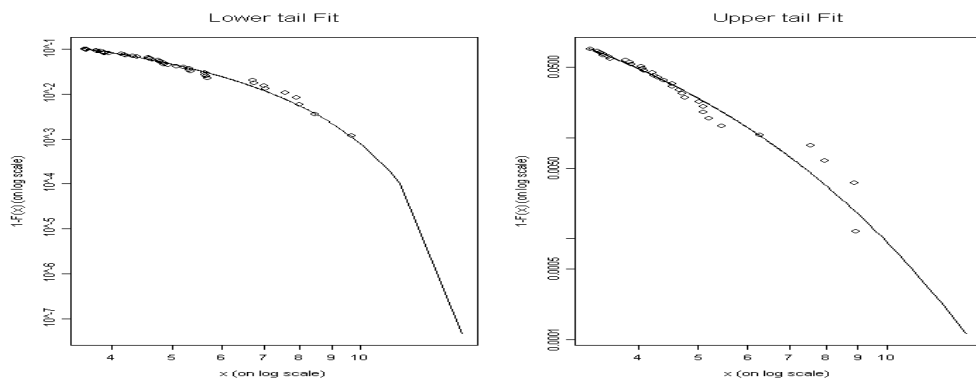


图 4：沪深 300 股指现货收益率上尾和下尾拟合图

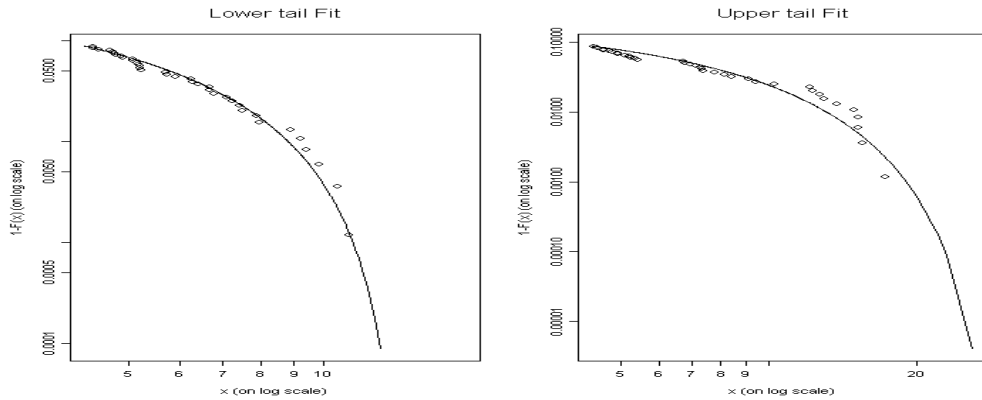


图 5：沪深 300 股指期货收益率上尾和下尾拟合图。

3、基于极值分布的 VaR 和 CVaR 估计结果

为了凸现极值分布对极端风险的刻画能力，下表同时给出了基于正态分布和极值分布的 VaR 和 CVaR 估计值，由下表不难看出：期货收益率的风险要明显的大于现货收益率的风险，极值分布下的期货风险值大概是现货的两倍；在 0.975 和 0.99 的置信水平下，基于极值分布的风险估计值要大于正态分布下的风险值，说明越是在高分位数，极值分布越能捕捉到尾部风险。

表 2 基于极值分布的 VaR 和 CVaR 估计

方法 分位 数	基于正态的 Var 和 CVaR				基于极值分布的 Var 和 CVaR			
	现货 S		期货 F		现货 S		期货 F	
	Var	CVaR	Var	CVaR	Var	CVaR	Var	CVaR
0.95	4.4806	5.6132	6.2162	7.7972	3.9511	5.4358	7.0126	10.6872
0.975	5.3347	6.3589	7.4085	8.8381	4.9655	6.4726	9.8631	13.0676
0.99	6.3279	7.2464	8.7948	10.076	6.3300	7.8674	13.0794	15.7535

(四) Copula 函数建模和相依风险测度

1、经验 Copula 函数

经验 Copula 函数由 Deheuvels (1984) 提出，Nelsen 在 1999 年做了进一步的阐述，它是基于非参数建模的方法对金融时间序列的真实分布做出较为精确的拟合，这种估计能够比其他方法更接近数据的实际分布，因此，在将沪深 300 股指现货和期货收益率的边际分布（极值分布）转化为均匀分布进行不同的 Copula 函数估计之前，有必要考察经验 Copula 函数的一些性状。

由于 Gumbel Copula 在上尾有着较高的相关性，即主要反映市场交易活跃时的相关，不妨称之为“牛式相关”^[20]；Clayton Copula 在下尾有着较高的相关性，即主要反映市场交易不活跃时的相关，称之为“熊式相关”；Frank Copula 是对称分布，属于“对称相关”。由经验 Copula 概率密度的等高线可以看出，该分布的两端概率的密集程度大体相当或下尾比上尾处的概率稍微密集了些，因此有理由猜想利用对称分布的 Frank Copula 或 Clayton Copula 可以较为真实的反映这一相关结构。

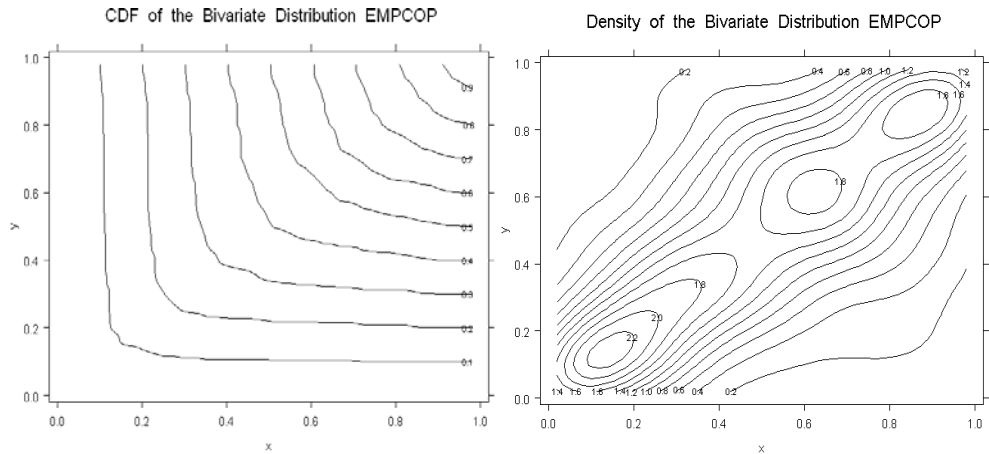


图 6: 经验 Copula 密度函数和概率密度的等高线

2、Copula 函数的估计

我们选取 Gumbel、Gaussian、Frank 和 Clayton 四种 Copula 函数，根据实际推断函数法进行估计，其结果如下：

表 3 Copula 函数的估计结果

	Gumbel	Gauss	Frank	Clayton
delta	1.94412	0.70234	6.77226	1.75568
Kendalls. tau	0.48563	0.4957	0.5520	0.46747
Spearman's. rho	0.6658	0.6853	0.7522	0.6451
loglike	135.3727	143.7926	158.4203	149.3260
AIC	-268.7454	-285.5851	-314.8407	-296.6520
BIC	-264.7004	-281.5401	-310.7957	-292.6070

由上表可以看出 Frank Copula 的极大似然值最大，并且 AIC 和 BIC 是最小的，因此选取 Frank Copula 是比较恰当的。根据以上估计结果对函数进行拟合，图 7 给出经验 Copula 和四种 Copula 的拟合图的等高线进行对比，不难看出，Frank Copula 的拟合效果最好，其次为 Clayton Copula。为了进一步验证这一结论的可靠性，利用 Frank Copula 函数对沪深 300 股指现货和期货收益率序列进行模拟，对照真实收益率，可以推知基于 Frank Copula 对收益率分布的拟合非常理想（见图 8）。

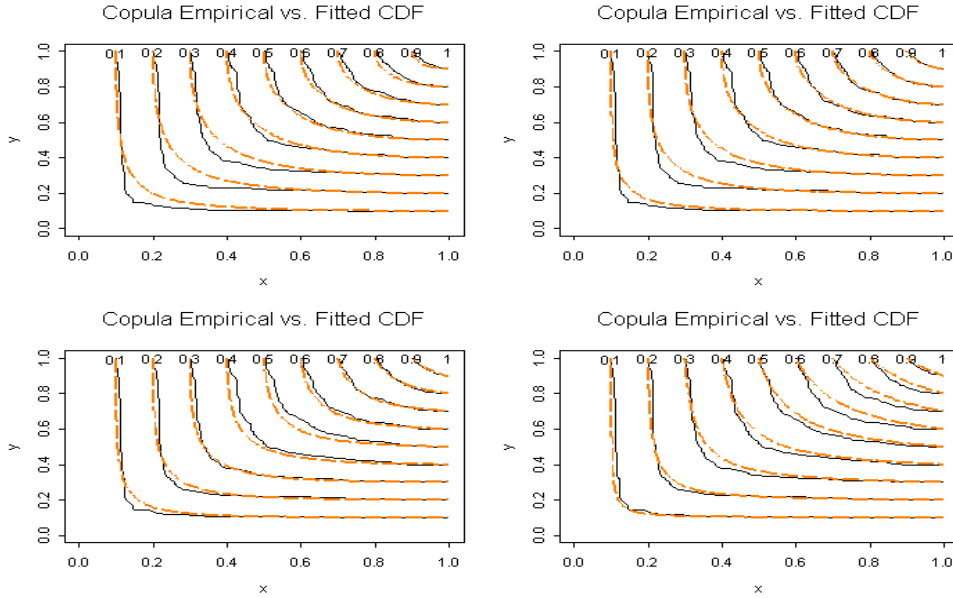


图 7：四种 Copula 函数与经验 Copula 函数的拟合比较。左上为 Gumbel Copula，右上为 Gauss Copula，左下为 Frank Copula，右下为 Clayton Copula。

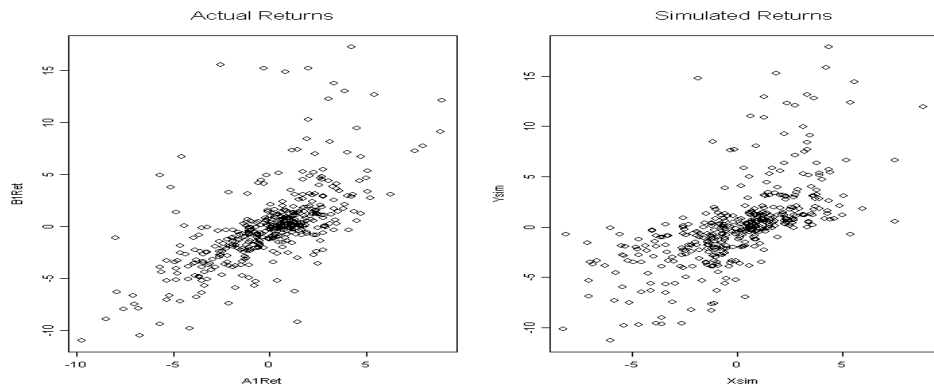


图 8：基于 Frank Copula 模拟收益率与真实收益率

3、基于 Frank Copula 的 VaR 和 CVaR 估计结果

现在考虑极端事件的相依风险的测度问题， s 和 f 分别表示沪深 300 股指现货和期货的收益率，设 λ_1 和 λ_2 分别为股指现货和期货的投资比例，这两种资产的组合投资的对数收益率可以表示为^[21]：

$$R = \ln(\lambda_1 e^s + \lambda_2 e^f) \quad (24)$$

选取极值分布作为边际分布，Frank Copula 为连接函数，模拟出联合分布 F 的随机数，对于给定的组合投资收益率 R ，在给定的置信水平 q 下，用蒙特卡罗模拟，产生 10000 组模拟的资产组合估计 VaR。

表 4 不同组合比例的 VaR 和 CVaR 估计

组合比例	$VaR_{0.95}$	$CVaR_{0.95}$	$VaR_{0.975}$	$CVaR_{0.975}$	$VaR_{0.99}$	$CVaR_{0.99}$
$\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.9$	4.4486	5.7069	5.6132	6.6471	6.6064	7.5190
$\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.7$	4.0941	5.1259	5.1485	6.1008	5.8213	6.8273

$\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.5$	4.0453	5.1682	4.9014	6.0869	6.0440	6.9047
$\lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.3$	4.0531	5.1682	4.8819	6.0025	5.9117	6.8118
$\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0.1$	4.2128	5.3447	5.1608	6.2330	6.1194	7.0764

以上给出了五种组合下的 VaR 和 CVaR 值, 不难发现, 随着现货投资比例的增加, 风险值不断降低, 然后又随之增加, 大致呈现“U”型特征。以上面数据为例, 在 0.975 和 0.99 的置信水平下, 现货的投资比例为 0.7, 期货的投资比例为 0.3 时风险值最低, 不断的缩短步长, 总可以找到风险最低的投资组合, 该思路可以运用到套利上面去, 从而为研究股指期货的最优套期保值提供了新的范式, 这也是本文下一步的研究重点。

四 结论

第一, 通过 DCC-GARCH 模型对股指仿真期货和现货收益率的条件相关的动态描述中可以看出, 沪深 300 股指期货和现货收益率的变动趋势大致相同, 具有较强的动态相关关系, 投资者可以利用现货和期货收益波动的相关性进行有效的套期保值, 规避系统性风险; 而监管者需要更加密切的关注证券市场的动态变化, 防止股指期货推出后市场的恶意操纵。

第二, 以极值分布为边际分布构造的 Copula 函数极大限度的捕捉到了极端风险的相依关系。进一步的实证表明: 期货风险要明显的大于现货风险, 极值分布下的期货风险值大概是现货的两倍; 沪深 300 股指现货和期货收益率的尾部相关结构可以用 Frank 函进行描述, 即无论市场疯狂上涨还是急剧下跌过程中股指现货和期货收益率之间存在着同时相互影响、相互加强的双边风险关联关系, 同时, 尾部相关结构也可以用 Clayton 函数进行刻画, 这一结果意味着当资本市场出现处于持续下跌、剧烈波动等极端风险事件时, 股指期货的风险关联性相互加强。因此, 设定恰当的稳定机制, 尽可能不干扰市场正常波动和交易情况。特别是它对于预防股灾等极端股市危机时, 是极其必要的。

第三, 在利用 Frank Copula 进行极端风险测度的同时, 我们发现, 在投资组合比例的步长为 0.2 时, 随着现货的投资比例的增加, 风险值先是不断降低后又逐渐增加, 组合投资风险大致呈“U”型分布, 缩短步长, 可以得到风险最低时的投资组合, 至少可以得到对应风险局部最小值的投资组合, 其实这是一种风险对冲的思想, 从而为最优套期保值比率的研究提供了一种新的思路。

参考文献

- [1] 王志诚, 周春生. 金融风险管理研究进展: 国际文献综述[J]. 管理世界. 2006(4)
- [2] 马林. 金融风险度量及其有效前沿, 华中科技大学硕士学位论文, 2006年1月
- [3] Danielsson J., CG.de Vries. Value at Risk and Extreme Returns, London School of Economics[M], Financial Markets Group Discussion Paper 1997(272-273).
- [4] 韦艳华, 张世英, 郭焱. 金融市场相关程度与相关模式的研究[J]. 系统工程报. 2004, 19(4): (355-362).
- [5] Sklar, A., 1959, “Fonctions de Repartition a n Dimensionset Leurs Marges”, Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris, Vol.8, pp.229~231.
- [6] Joe, H., 1997, “Multivariate Models and Dependence Concepts”, Chapman & Hall.
- [7] Nelsen, R., 1999, “An Introduction to Copulas”, Springer, New York
- [8]. Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A., 2003, “Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management”, In: Rachev, S. (Ed.), Handbook of Heavy Tailed

- Distributions in Finance, Elsevier, Rotterdam, pp.329~384.
- [9] Longin, F., 2000, "From Value at Risk to Stress Testing:the Extreme Value Approach", Journal of Banking and Finance, Vol.24, pp.1097~1130.
- [10] Frey, R. and McNeil, A.,2003, "Modeling Dependent Defaults", Journal of Risk, Vol.6, No.1, pp.59~92.
- [11] Bouye, E., Gausse, N. and Salmon, M., 2002, "Investigating Dynamic Dependence Using Copula", Manuscript, Financial Econometrics Research Center
- [12] Longin, F. and Solink, B., 2001, "Extreme Correlation of International Equity Markets", Journal of Finance, Vol.56, pp.649~676.
- [13] Glasserman, P., Heidelberger, P. and Shahabuddin, P.,2002, "Portfolio Value- at- risk with Heavy- tailed Risk Factors", Mathematical Finance, Vol.12, pp.239~270
- [14] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A., 2003, "Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management", In: Rachev, S. (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, Rotterdam, pp.329~384.
- [15] Rosenberg, J. and Schuermann, T., 2005, "A General Approach to Integrated Risk Management with Skewed, Fat -tailed Risk", FRB of New York Staff Report No. 185.
- [16] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A., 2003, "Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management", In: Rachev, S. (Ed.), Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, Rotterdam, pp.329~384.
- [17] 郑振龙, 王保合. 基于极值理论的风险价值度量[J]. 金融学季刊. 2005, 1(1)
- [18] McNeil.A. J,Frey.R.Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series:An Extreme Value Approach[J].Journal of Empirical Finance 2000,7: 27(1-300).
- [19] DuMouchel W.M. Estimating the Stable Index α in Order to Measure Tail Thickness: A Critique[M]. Annals of Statistics 11.1983.(1019-1031).
- [20] 李竹渝, 鲁万波, 龚金国. 经济金融计量学中的非参数估计技术[M]. 科学出版社. 2007.
- [21] 欧阳资生. 信用风险相依模型及其应用研究[M]. 知识产权出版社. 2008年2月.

The risk characters of China 300 Index Futures

---- Measure the risk of dependency Based on Copula function

WANG Ji-pei WANG Kai-ye

(Southwestern University Of Finance and Economics ,Statistics University of SWUFE, ,E-Commerce School,Chengdu ,610074)

Abstract

This paper study extreme risks and the relationship between the China 300 stock index and stock trading simulation yield. DCC-GARCH model used to describe the dynamic conditions of the correlation coefficient between the stock index futures and spot goods, And extreme value distribution for the marginal distribution of the four commonly used Copula function fitting, We found Frank Copula is the best fit, followed by Clayton Copula. On this basis, with different combinations of VaR and CvaR for Measure, Found that a "U"-type features between the proportion of portfolio

and risk, it also provides a new approach for hedge research.

Keywords: Extreme value distribution; Copula function; VaR; CVaR; Hedge

作者简介:

王吉培, 男, 1984.05.26, 汉族, 籍贯河北省邢台, 西南财经大学统计学院在读硕士研究生。
研究方向: 金融计量与应用研究。通讯地址: 四川省成都市光华村街 55 号西南财经大学统计学院。邮编: 610074 电话: 13980951471 Email: wangjip_001@163.com